Estratto dal *Periodico di Matematiche*
Giugno 1953 - Serie IV, vol. XXXI, n. 3 (pag. 186-188)

CARLO FELICE MANARA

Un teorema sui triangoli equilateri

NICOLA ZANICHELLI EDITORE
BOLOGNA

EDITORE NICOLA ZANICHELLI - BOLOGNA

PERIODICO DI MATEMATICHE

Il *Periodico di Matematiche* continua la pubblicazione per le scuole medie che, iniziata in Roma da Davide Besso nel 1886, fu curata fino al 1896 da Aurelio Lugli, già dal secondo anno associato alla direzione, e proseguita poi in Livorno da Giulio Lazzeri, fra il 1897 e il 1918; fu rinnovato da F. ENRIQUES nel 1921 e da Lui diretto fino al 1946.

Il *Periodico* pubblica sopratutto articoli riguardanti le matematiche elementari intese in senso lato, ed altri tendenti ad una più vasta comprensione dello spirito matematico. Esso contiene inoltre relazioni del movimento matematico straniero, note di bibliografia e di trattatistica, varietà (problemi, giuochi, paradossi, etc.) nonchè notizie di carattere professionale.

Il terzo numero (Giugno 1953) della trentunesima annata consta di 56 pagine e contiene, oltre le Recensioni, le Questioni, i seguenti articoli:

Estratto dal *Periodico di Matematiche*
Giugno 1953 - Serie IV, vol. XXXI, n. 3 (pagg. 186-188)

Un teorema sui triangoli equilateri

Recentemente varii Autori si sono occupati del seguente Teorema di Geometria elementare:

« Dato un triangolo equilatero E ed un punto P del suo « piano è possibile costruire un secondo triangolo avente per « lati le distanze di P dai vertici di E » (1).

Di questo Teorema presentiamo qui una dimostrazione (che si riduce ad una verifica analitica) più che altro per mostrare quale notevole semplicità possano raggiungere i calcoli ed i ragionamenti relativi ad una determinata questione quando si tenga conto delle simmetrie che i dati della questione stessa presentano (2).

Non crediamo inutile questa esposizione anche se le indagini fatte non ci permettono di escludere con sicurezza che qualcosa di simile non si trovi già nella imponente letteratura che riguarda le proprietà del triangolo. Non ci pare infatti che valga la pena di approfondire una indagine bibliografica, di una utilità molto discutibile, che appare di improbabile successo.

Siano dunque $a_1\ a_2\ a_3$ lé misure dei tre lati di un triangolo in una unità arbitraria e pertanto tre numeri (ovviamente reali ed) essenzialmente positivi. Facciamo anzitutto la seguente

---

(1) D. Pompeïu, *Une identité entre nombres complexes et un théorème de géométrie élémentaire*, « Bull. Math Phys. Ecole polytechn. », Bucarest, 6, 6-7 (1936).

S. V. Pavlovic', *Sur une démonstration géométrique d'un théorème de M. D. Pompeïu*, « Elemente der Math. », 8, 13-15 (1953).

J. P. Sydler, *Autre démostration du théorème de Pompeïu*, ibid., 15-16 (1953).

(2) C. F. Manara, *Vedute sulla Geometria del Triangolo*, « Periodico di Matematiche », Serie IV, vol 23 (1942).

Osservazione I – Condizione necessaria e sufficiente affinchè esista un triangolo reale i cui lati abbian le misure (positive) a_1 a_2 a_3 è che sia positivo il prodotto

$$\Pi = (a_1 + a_2 - a_3)(a_2 + a_3 - a_1)(a_3 + a_1 - a_2)$$

Che la condizione sia necessaria segue dalle note relazioni che legano i lati di un triangolo. Che sia sufficiente si dimostra facendo vedere che non può essere Π positivo avendo due dei suoi fattori negativi; infatti se fosse per es.

$$a_1 + a_2 < a_3$$
$$a_2 + a_3 < a_1$$

si avrebbe, sommando membro a membro

$$2a_2 < 0$$

contro l'ipotesi che i numeri a_1 a_2 a_3 siano tutti positivi.

Ora è noto che il prodotto Π sopra considerato differisce soltanto per un fattore positivo dal quadrato dell'area del triangolo i cui lati hanno per misure a_1 a_2 a_3. Infatti, detta S la misura dell'area del triangolo, sussiste la relazione, detta di Erone:

$$S^2 = \frac{1}{16}(a_1 + a_2 + a_3)(a_1 + a_2 - a_3)(a_2 + a_3 - a_1)(a_3 + a_1 - a_2) =$$
$$= \frac{1}{16}(a_1 + a_2 + a_3)\Pi$$

Possiamo quindi enunciare la

Osservazione II – Condizione necessaria e sufficiente affinchè esista un triangolo reale i cui lati abbiano per misure a_1 a_2 a_3 è che sia $S^2 > 0$.

Si noti ora che la S^2 può essere espressa nella forma

$$S^2 = \frac{1}{4}(a_1^2a_2^2 + a_2^2a_3^2 + a_3^2a_1^2) - \frac{1}{16}(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)^2$$

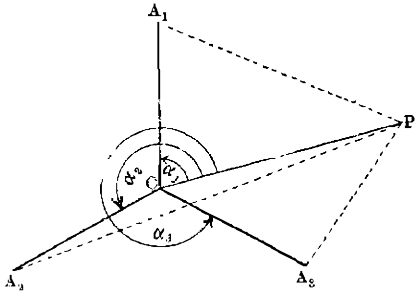
Segue pertanto di qui la validità della

Osservazione III – Il quadrato S^2 dell'area del triangolo i cui lati hanno le misure a_1 a_2 a_3 è funzione simmetrica dei quadrati dei numeri a_1 a_2 a_3 e quindi funzione razionale dei coefficienti della equazione le cui radici sono a_1^2 a_2^2 a_3^2.

Siano ora A_1 A_2 A_3 i vertici di un triangolo equilatero e sia O il suo centro; per semplicità scegliamo l'unità di misura dei segmenti in modo che si abbia

$$OA_1 = OA_2 = OA_3 = 1$$

Sia P un punto qualunque del piano; diciamo ρ la misura del segmento OP; chiamiamo α_i gli angoli $P\widehat{O}A_i$ $(i = 1,\ 2,\ 3)$ ed a_i le misure dei segmenti PA_i.



Per un noto Teorema (detto di Carnot) si ha

(2) $$a_i^2 = \rho^2 + 1 - 2\rho \cdot \cos\alpha_i$$

Ora essendo equilatero il triangolo A_1 A_2 A_3 si ha

$$\alpha_2 = \alpha_1 + 2\pi/3\,;$$
$$\alpha_3 = \alpha_2 + 2\pi/3$$

per cui $\cos\alpha_1$ $\cos\alpha_2$ $\cos\alpha_3$ sono radici della equazione (di trisezione dell'angolo)

(3) $$4\cos^3\alpha_i - 3\cos\alpha_i + k = 0$$

dove k è una opportuna costante il cui valore preciso non ci interessa qui. Dunque la equazione algebrica di terzo grado $f(x) = 0$ le cui radici sono i quadrati dei numeri a_1 a_2 a_3 si ottiene eliminando $\cos\alpha_i$ tra la (2) e la (3) e ponendo poi $x = a_i^2$. Eseguendo i calcoli si ottiene la equazione

$$f(x) = x^3 - 3(\rho^2+1)x^2 + 3\{(\rho^2+1)^2 - \rho^2\}\,x -$$
$$- (\rho^2+1)^3 + 3\rho^2(\rho^2+1) - 2k\rho^3 = 0$$

E di qui in forza della Osservazione III e per le note relazioni che legano le radici di una equazione ai suoi coefficienti

$$16S^2 = 12\{(\rho^2+1)^2 - \rho^2\} - 9(\rho^2+1)^2 = 3\rho^4 - 6\rho^2 + 3$$

Ora si vede immediatamente che quest'ultimo polinomio in ρ^2 è positivo per qualunque valore reale di ρ e quindi, per la Osservazione II, si ha il Teorema.